Concours Centrale - Supélec 1993

Épreuve : MATHEMATIQUES II — Option TA

Un espace affine euclidien oriente de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R}_0\,(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. x, y, z désignent les coordonnées d'un point dans ce repère.

A tout réel θ on associe les vecteurs $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$, $\vec{u}_1(\theta) = \vec{k} \wedge \vec{u}(\theta)$ et le repère orthonormal direct $\mathcal{R}_\theta\,(O;\vec{u}\,(\theta), \vec{u}_1\,(\theta), \vec{k})$. Les coordonnées d'un point dans $\mathcal{R}_0$ sont notées X, Y, Z.

Le préliminaire définit les surfaces dont on se propose l'étude. Les parties I et II sont largement indépendantes.

Les fonctions considérées f, ϕ, g, h sont supposées de classe suffisante C^1 ou C^2 pour tous les calculs. On utilise des notations abrégées telles que :

$$\vec{u},\ M,\ \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial r}\ldots \text{ pour } \vec{u}(\theta),\ M(r,\theta),\ \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial r}(r,0)\ \ldots$$

Les projections considérées sont orthogonales.

Préliminaire.

Soit J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, f une fonction numérique réelle définie sur $\mathbb{R}\times J$. On lui associe la surface paramétrée S représentée par : $(r,\theta) \in \mathbb{R}\times J \mapsto \overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta) + f(r,\theta)\vec{k}$.

0.1) Calculer les composantes dans la base $(\vec{u},\vec{u}_1,\vec{k})$ du vecteur

$$\vec{N} = \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial r} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \theta}.$$

On suppose $r \neq 0$, écrire une équation du plan tangent en M à S dans le repère $\mathcal{R}_\theta$ et donner les coordonnées du point d'intersection T de ce plan avec l'axe $(O,\vec{k})$.

0.2)

a) Déterminer les fonctions f pour lesquelles la droite MT fait avec $(O,\vec{k})$ un angle égal à $\pi/4$, quel que soit le point M de S pour lequel $r \neq 0$.

b) Montrer qu'une surface S vérifiant la propriété précédente peut toujours être représentée par le paramétrage :

$$(r,\theta) \in \mathbb{R}\times I \mapsto \overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta) + (r+\phi(\theta))\vec{k} \qquad (1)$$

où I est un intervalle convenable associé à J, et ϕ une fonction numérique réelle définie sur I.

Partie I

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés d'une surface S définie par un paramétrage du type (1) et on les applique à un exemple.

I.1)

a) Caractériser la courbe D_0 décrite par M lorsque θ est fixé dans l'intervalle I.

b) On considère une courbe tracée sur S définie par $r = g(\theta)$. Déterminer la fonction g de façon que, pour tout θ, la tangente à cette courbe au point $M(g(\theta),\theta)$ soit orthogonale à D_θ. Montrer qu'une telle courbe est située sur un cône de révolution d'axe (O,k), de demi-angle au sommet $\pi/4$.

I.2) On considère les sections de S par les plans parallèles au plan $(O;\vec{i},\vec{j})$. Montrer que les plans normaux à ces sections aux points situés sur D_θ, θ fixé dans I, contiennent une droite Δ_0 parallèle à $(O;\vec{k})$.

I.3) Étude d'un exemple.

Soit a un réel strictement positif. On prend $I =]-\pi/2, \pi/2[$.

a) Déterminer la fonction ϕ pour que la surface S contienne la droite d'équations dans $\mathcal{R}_0$

$$\begin{cases} x - a = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

On appelle S_0 la surface ainsi obtenue.

b) Tracer les sections de S_0 par les deux plans d'équations respectives $z = a$ et $z = -a$. Représenter la projection s_0 sur le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ de la partie de S_0 définie par les inégalités : $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4$ et $-a \le z \le a$. Calculer l'aire de s_0.

Représenter la projection s'_0 de cette même partie sur le plan $(O;\vec{i},\vec{k})$.

c) Déterminer la fonction g de la question I.1) b) de façon que le cône de révolution d'axe $(O,\vec{k})$ qui contient la courbe définie sur S_0 par $r = g(\theta)$ ait pour sommet O. Quelle est alors cette courbe ?

d) On considère toujours S_0. Déterminer la surface engendrée, lorsque θ varie dans I, par les droites Δ_θ obtenues à la question I.2). Quelles sont la nature de cette surface et sa section par le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$?

Partie II

Dans cette partie, a désigne un réel strictement positif, I l'intervalle $]-\pi,\pi[$ et on étudie la surface S_1 définie par le paramétrage :

$$(r,\theta) \in \mathbb{R} \times I \mapsto \overrightarrow{OM} = r\vec{u}(\theta) + (r - a\tan(\theta/2))\vec{k}.$$

II.1)

a) Donner des équations dans le repère $\mathcal{R}_\theta$ de la droite D_θ décrite par M lorsque θ est fixé dans I.

b) Soit L le lieu du point commun à D_θ et $D_{\theta+\pi}$ lorsque θ varie dans $]-\pi,0[$. Donner des équations de L dans le repère $\mathcal{R}_0$. Que peut-on dire de D_0 et L ? En déduire une définition de S_1 comme engendrée par deux droites vérifiant des conditions géométriques simples.

II.2)

a) Quelle est l'intersection de S_1 et du plan $(O;\vec{i},\vec{k})$?

b) Montrer que S_1 admet dans $\mathcal{R}_0$ l'équation cartésienne :

$$y(x^2 + y^2 - z^2) - 2a(x^2 + y^2 - xz) + a^2 y = 0.$$

(On pourra écrire : $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$).

II.3)

a) Montrer que S_1 admet un axe de symétrie.

b) Étudier et tracer les intersections de S_1 avec les plans $(O;\vec{j},\vec{k})$ et $(O;\vec{i},\vec{j})$.

c) Quelles sont les projections de S_1 sur les plans $(O;\vec{i},\vec{k})$ et $(O;\vec{i},\vec{j})$?

II.4) Calculer le volume limité par la surface S_1 et situé dans la région définie par les conditions :

$$x \ge 0,\ y \ge 0,\ y \le a \text{ et } y - x \ge 0.$$

••• FIN •••